

MaOEA/A2R: 一种基于 A2R 支配关系的高维多目标进化算法

谢承旺¹, 付世炜²

(1. 华南师范大学数据科学与工程学院, 广东汕尾 516600; 2. 南宁师范大学计算机与信息工程学院, 广西南宁 530100)

摘 要: 传统的 Pareto 支配关系在高维目标空间存在固有缺陷, 而一些改进的支配方法在平衡高维目标解群的收敛性与多样性上尚有提升空间. 基于此, 提出一种参考向量关联区域(小生境)自动缩减的支配关系 A2R (dominance relation based on the Automatically reduced region Associated with the Reference vector). 该支配方法在进化全过程中逐代缩减小生境规模, 从而实现收敛性与多样性自动平衡, 而且不引入额外参数. 另外, 提出利用基于 L_p -范式 ($p=1/M$, M 为目标数) 的拥挤距离度量高维目标解群的多样性. 将上述两种策略嵌入到经典的 NSGA-II (Nondominated Sorting Genetic Algorithm II) 框架, 设计一种基于 A2R 支配关系的高维多目标进化算法 MaOEA/A2R (Many-Objective Evolutionary Algorithm base on A2R). 该算法与其他 5 种代表性的高维多目标进化算法一同在 5-、10-、15- 和 20- 目标的 DTLZ (benchmark MOP proposed by Deb, Thiele, Lau-manns, and Zitzler) 和 WFG (benchmark MOP proposed by Walking Fish Group) 基准测试问题上进行 IGD (Inverted Generational Distance) 和 HV (HyperVolume) 性能测试. 结果表明, MaOEA/A2R 算法总体上具有较好的收敛性和多样性. 由此表明, MaOEA/A2R 是一种颇具前景的高维多目标进化算法.

关键词: 进化算法; 高维多目标优化问题; 改进支配关系; 高维多目标进化算法

基金项目: 国家自然科学基金 (No.61763010); 广西自然科学基金 (No.2021GXNSFAA075011)

中图分类号: TP181

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)08-2758-15

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20230723

MaOEA/A2R: A Many-Objective Evolutionary Algorithm Based on A2R Dominance Relation

XIE Cheng-wang¹, FU Shi-wei²

(1. School of Data Science and Engineering, South China Normal University, Shanwei, Guangdong 516600, China;

2. College of Computer and Information Engineering, Nanning Normal University, Nanning, Guangxi 530100, China)

Abstract: There exist some inherent defects in the traditional Pareto dominance relation in many-objective optimization space, while some modified dominance relations have much room for improvement in balancing the convergence and diversity of many-objective evolutionary population. Based on this, a new dominance relation (dominance relation based on the Automatically reduced region Associated with the Reference vector, A2R) automatically shrinks the region (niche) associated with the reference vector. Specially, it reduces the size of the niche from generation to generation along the whole evolutionary process in order to achieve a balance of convergence and diversity adaptively. Furthermore, the A2R does not introduce any additional parameter. In addition, the crowding distance measure based on L_p -normal form (p equals $1/M$, and M denotes the number of objectives) is used to improve the diversity of the solution set in many-objective space. Finally, the above two strategies are embedded into the framework of NSGA-II (Nondominated Sorting Genetic Algorithm II), and then a many-objective evolutionary algorithm based on A2R (MaOEA/A2R) is designed. The MaOEA/A2R is compared with other five representative many-objective evolutionary algorithms (MaOEA) on the DTLZ and WFG benchmark functions with 5-, 10-, 15-, and 20-objective in terms of IGD (Inverted Generational Distance) and HV (HyperVolume) indicators. The empirical results overall show that MaOEA/A2R can obtain better convergence and diversity. Therefore, the proposed MaOEA/A2R is a promising many-objective evolutionary algorithm.

Key words: evolutionary algorithm; many-objective optimization problem; modified dominance relation; many-objective evolutionary algorithm

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.61763010); Natural Science Foundation of Guangxi Province (No.2021GXNSFAA075011)

1 引言

现实应用中不断涌现出要求同时优化 4 个及以上目标的优化问题^[1,2],即高维多目标优化问题(Many-objective Optimization Problem, MaOP). 与目标数较少(含有 2 个或 3 个目标)的多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem, MOP)相比, MaOP 的求解难度更大,其原因有以下几点^[3]:

(1)在基于种群的进化算法中,由于非支配解数目随目标数呈指数级增长,严重削弱种群进化的压力.

(2)高维目标空间易于产生支配抵触解(Dominance Resistance Solution, DRS),显著恶化种群的收敛性.

(3)传统的 Pareto 最优性并不适用于高维目标空间,一些多目标进化算法(Multi-Objective Evolutionary Algorithm, MOEA)采用主动多样性促进(Active Density Promotion, ADP)机制进行环境选择. 在 DRS 和 ADP 共同作用下,MOEA 获得的最终解集将难以逼近真实的 Pareto 前沿(Pareto Front, PF).

(4)高维目标空间中一些传统的交叉和变异算子产生的子代一般远离其父代,这些变化使算子面临失效的困境.

由于经典的 Pareto 最优性在高维目标空间中可扩展性差,研究者从不同的方面提出了多种改进的支配方法以适于求解 MaOP 问题^[4]. 根据这些改进方法的核心思想和技术可将它们大致分成如下几种类型:(1)修改目标值的方法,典型的如 grid 关系^[5];(2)目标数的计数方法,比如 L -最优性^[6];(3)修改 Pareto 最优性定义的方法,典型范例包括 GPO (Generalized Pareto Optimality) 最优性^[7]及其改进的 $(M-1)$ -GPD (Generalized Pareto Dominance)^[8]等;(4)利用角度的方法,如(Angle Dominance, AD)支配关系^[9]和 DAV (Dynamical Angle Vector)支配关系^[4]等;(5)基于参考点(或权重向量)的方法,典型的包括 SDR (Strengthened Dominance Relation)关系^[10]、CSDR (Controlled Strengthened Dominance Relation)支配关系^[11]、 θ -支配关系^[12]、RPS- (Reference Points-based Strengthened dominance)支配关系^[13]和 CDD (dominance relation Combing Double Distances)支配关系^[14]等.

总体上,与传统的 Pareto 支配关系相比,这些改进的支配方法通常具有更好地区分 Pareto 非劣解的能力,但它们仍有较大的提升空间. 比如:(1)一些支配方法强调收敛性而多样性不足,如 L -支配等;(2)一些支配方法强调多样性而收敛性不足,如 AD-支配等;(3)一些

支配方法需要预设参数,而且算法的性能对参数值敏感,如 grid-支配、 $(M-1)$ -GPD 等;(4)已有支配方法很少考虑在进化过程动态调整收敛性与多样性的占比,其在较大程度上影响了算法性能提升.

但实际上,进化算法在求解高维多目标优化问题不同阶段对收敛性与多样性的要求是不同的,正如文献[14]的研究表明,算法初期,规模有限的种群个体随机分布于巨大的高维目标空间,其收敛性一般较差,需要强调收敛性以促使种群逼近待解问题的 Pareto 前沿;算法后期,种群逐渐逼近待解问题的 Pareto 前沿,但其分布可能不理想,例如一些个体可能过于集中在待解问题 Pareto 前沿附近的某些局部区域等. 在这种情况下,需要强调多样性以改善种群分布的广度和均匀性. 最后,支配方法中的预设参数不方便使用,因此构造不引入额外参数的支配方法值得期待.

有鉴于此,提出一种参考向量关联区域自动缩减的支配关系 A2R (dominance relation based on the Automatically reduced region Associated with the Reference vector). 该支配关系在种群进化过程逐代缩减参考向量关联区域(小生境)的大小,实现自动地平衡收敛性和多样性之目的. 与现有的改进支配方法相比,A2R 具有如下特点:

(1)由于高维多目标进化算法 MaOEA (Many-Objective Evolutionary Algorithm)在不同进化阶段对收敛性和多样性的要求不同,A2R 在进化全过程自适应调整参考向量关联区域(小生境)的大小有效实现收敛性和多样性的平衡.

(2)A2R 计算解个体与其对应关联区域最近边界的距离而非与参考向量的距离,实现动态且精准反映个体分布状况的效果.

(3)A2R 未引入额外参数,便于使用. 不仅如此,还将 A2R 嵌入到 NSGA-II 框架^[15]以替代其原有的 Pareto 支配.

利用基于 L_p -范式($p < 1$)的拥挤距离^[4]替代其原有的基于欧氏距离的度量,构造一种基于 A2R 支配方法的高维多目标进化算法 MaOEA/A2R (Many-Objective Evolutionary Algorithm based on A2R). 新算法与 5 种新近提出的高效的 MaOEA 一同在 5-、10-、15-、20-目标的 DTLZ (benchmark MOP proposed by Deb, Thiele, Laumanns, and Zitzler)^[16]和 WFG (benchmark MOP proposed by Walking Fish Group)^[17]系列测试问题上检验 IGD (Inverted Generational Distance)^[18]和 HV (Hypervol-

ume)^[19]指标性能,结果表明 MaOEA/A2R 具有显著较优的收敛性和多样性.

2 A2R 支配关系的定义及性质

A2R 支配关系考虑在高维目标种群进化过程逐代缩减参考向量关联区域(亦即小生境)的大小而自动平衡 MaOEA 的收敛性与多样性. 较之其他改进的支配方法, A2R 的特点包括:

(1) 在种群进化的全过程逐代调整小生境大小, 以实现算法收敛性与多样性的自动平衡.

(2) 计算解个体与关联区域最近边界的距离而非与参考向量的距离以自适应方式精准刻画个体的分布状况.

(3) 未引入额外参数, 方便使用.

(4) A2R 满足反自反、反对称和传递性, 其能在高维目标空间解群上建立起严格的偏序关系.

不妨设 $\omega = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ 为使用两层参考向量方法^[12]生成的 N 个均匀分布于高维目标空间的参考向量集, 在此基础上, 给出 A2R 支配方法的有关定义.

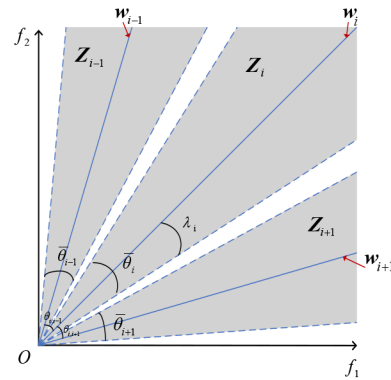
定义 1 (参考向量间的角度) 设 w_i 和 w_j 是参考向量集 ω 中任意两个向量, 则 w_i 与 w_j 间的夹角 θ_{ij} 可按式(1)进行计算:

$$\theta_{ij} = \arccos\left(\frac{w_i \times w_j}{|w_i||w_j|}\right) \quad (1)$$

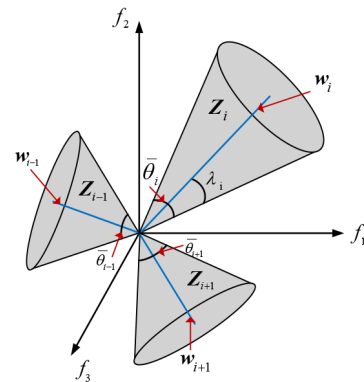
定义 2 (参考向量关联的区域) 设 w_i 是参考向量集 ω 中任意的参考向量, 对于 M 维目标空间而言, w_i 所关联的区域 Z_i 可表示为 $Z_i = \langle w_i, \bar{\theta}_i \rangle$. 其中 $\bar{\theta}_i$ 是 w_i 与其他 $(N-1)$ 个参考向量 $w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_N$ 构成的夹角中前 M 个最小角度的平均值, 即 $\bar{\theta}_i = (\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,M})$.

图 1 以规范化的二维和三维目标空间为例示意参考向量关联的区域. 例如, 图 1(a) 的 w_i, w_{i-1} 和 w_{i+1} 所关联的区域分别为 Z_i, Z_{i-1} 和 Z_{i+1} 3 个灰色扇形区域, 图 1(b) 的 w_i, w_{i-1} 和 w_{i+1} 所关联的区域则分别为 Z_i, Z_{i-1} 和 Z_{i+1} 3 个灰色圆锥体区域. 另外, 从图 1 中不难发现, 这些关联区域均是以参考向量为中心的区域, 区域的起点为目标空间的原点.

采用自适应策略有效平衡高维目标解群的收敛性与多样性是提升 MaOEA 性能的重要思路, 其原因在于: 进化初期, 有限规模的种群随机分布于巨大的目标空间, 其收敛性甚差, 需要采取有效手段或措施驱使个体向 PF 方向进化以改善收敛性; 进化后期, 尽管种群个体已趋近 PF, 但它们的分布可能不够理想, 比如聚集或稀疏分布在 PF 附近一些区域, 甚至某些区域根本没有个体. 因此在进化后期需要强调种群的多样性. 基于此, 本文设计了一种随进化代数 t 增大而自适应缩减参



(a) 二维目标空间中参考向量关联的区域



(b) 三维目标空间中参考向量关联的区域

图 1 参考向量关联的区域示意图

考向量关联区域的策略. 具体地, 设 t 为当前进化代数, t_{\max} 为最大进化代数, $\bar{\theta}_i$ 为定义 2 中参考向量 w_i 相应的前 M 个最小夹角的平均值; 又设 Z_i^t 和 $\bar{\theta}_i^t$ 分别为实施自适应缩减策略后 w_i 所关联的区域及其前 M 个最小夹角的平均值, 则 $Z_i^t = \langle w_i, \bar{\theta}_i^t \rangle$, 其中 $\bar{\theta}_i^t$ 的大小按照式(2)进行计算:

$$\bar{\theta}_i^t = \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{t_{\max}} \pi\right)\right) \cdot \bar{\theta}_i \quad (2)$$

从式(2)可以看出, 在初始代($t=0$)时, $\bar{\theta}_i^t$ 为 1.5 倍的 $\bar{\theta}_i$, 随着 t 逐渐增大, $\bar{\theta}_i^t$ 逐渐减小; 而当 $t=t_{\max}$ (最末代) 时, $\bar{\theta}_i^t$ 减至 0.5 倍的 $\bar{\theta}_i$. 式(2)的好处在于: (1) 进化初期, 由于参考向量关联较大的区域, 种群个体更可能分布在各关联区域内, 利用改进的支配关系增强选择压力有利于促进种群个体向 PF 方向逼近以改善收敛性; (2) 进化后期, 参考向量的关联区域不断缩减, 在改进的支配关系作用下, 小生境内的个体将有更大的生存机会, 而且它们将更靠近参考向量. 由于参考向量是预先生成且均匀分布的, 种群个体愈靠近参考向量意味着种群的多样性将自动地得到加强. 有鉴于此, 设计一

种参考向量关联区域自动缩减的支配关系 A2R,其能有效自动平衡高维目标种群的收敛性与多样性.

定义 3 (A2R 支配关系)设个体 i, j 是高维目标种群 P 中任意的两个个体,当且仅当满足下列条件之一时,称个体 i A2R 支配 j (记为 $i \prec_{A2R} j$):

(1)个体 i Pareto 支配个体 j ;

(2)当个体 i 与个体 j 彼此 Pareto 非支配且 i 和 j 位于相同关联区域内时,计算个体 i, j 与规范化目标空间原点的距离 $d_1(i), d_1(j)$ 以及它们与所在关联区域边界的最近距离 $d_2(i), d_2(j)$, 且满足 $d_1(i) - (1/M) \cdot d_2(i) < d_1(j) - (1/M) \cdot d_2(j)$. 这里 M 表示待解问题的目标数目.

(3)当个体 i 与个体 j 彼此 Pareto 非支配但 i 在关联区域内而 j 在关联区域外时,计算 i 和 j 至规范化目标空间原点的距离 $d_1(i), d_1(j)$ 以及 i 与其所在关联区域边界的最近距离 $d_2(i)$, 且满足 $d_1(i) - (1/M) \cdot d_2(i) < d_1(j)$.

为便于理解定义 3 中 d_1, d_2 距离,图 2 以两目标空间为例解释它们的含义.

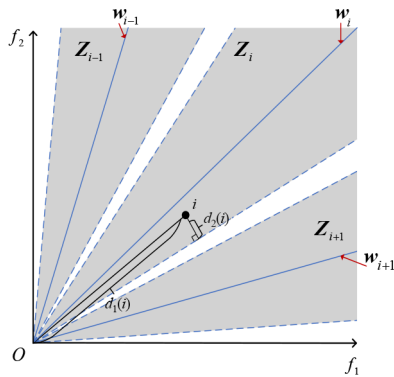


图 2 A2R 支配关系中 d_1 和 d_2 距离示意图

图 2 中,参考向量 w_i 所关联的区域为 Z_i ,个体 i 的 d_1 距离即为 i 与规范化目标空间原点 O 的距离, i 的 d_2 距离则为 i 与 Z_i 边界的最近距离. 值得注意的是,这里的 d_2 距离并非个体 i 与参考向量 w_i 的距离,而是 i 与其关联区域边界的最近距离. 这样定义是考虑到参考向量关联的区域是动态缩减的, d_2 距离也应随之变化,这种变化可动态且精确地刻画个体的分布情况.

根据定义 3 可以得出如下两个结论.

(1)当个体 i 和 j 位于相同的关联区域时,利用 d_1 和 d_2 距离可区分它们的优劣. d_1 值越小表明个体愈接近规范化目标空间的原点,认为其收敛性越好; d_2 值越大表明个体愈靠近参考向量,意味个体的多样性越好. 另外,随着目标空间维度 M 的增加,种群个体分布将更加稀疏,种群多样性将自动地得到保证. 在这种情况下,通过对 d_1 减去 $(1/M)$ 倍的 d_2 以降低多样性的比重来促进收敛性.

(2)当个体 i 和 j 分别位于关联区域的内部和外部时,

通常认为 j 的多样性较差,对 i 的 d_1 距离减去其 $(1/M)$ 倍的 d_2 距离后再与 j 的 d_1 距离相比以确定胜出者,其实质是偏好关联区域内的个体.

(3)当个体 i 和 j 位于不同的关联区域内部或均处于关联区域外部时, A2R 支配关系将利用 Pareto 支配关系择优个体.

为直观解释 A2R 支配关系,图 3 以规范化二维目标空间为例,示意种群个体在 4 种不同情形下彼此间的支配情况.

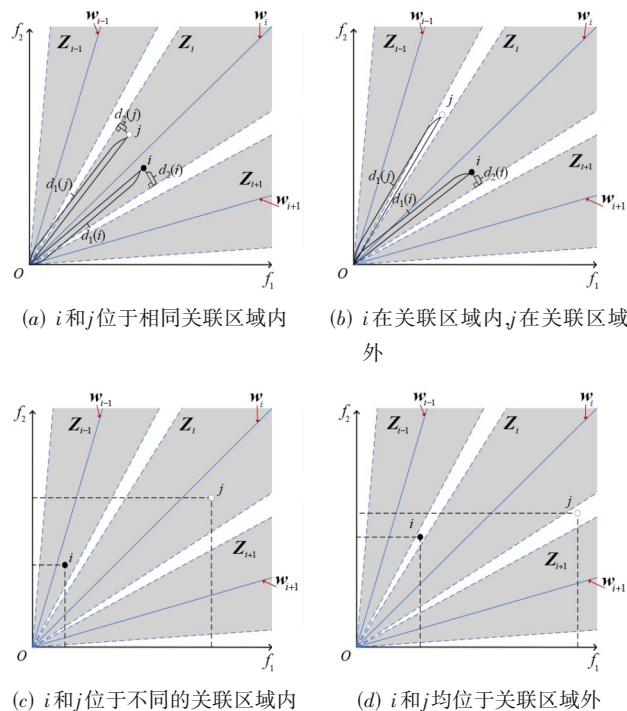


图 3 4 种不同情形下 A2R 支配情况示意图

在图 3(a)中, i 和 j 位于相同的关联区域内且彼此 Pareto 非支配,根据定义 3 的第 2 种情况,需计算 i 和 j 的 d_1, d_2 距离,并比较它们的综合值(即 $d_1 - (1/M)d_2$), 然后确定 i A2R 支配 j . 图 3(b)中, i 和 j 分别位于关联区域的内部和外部且彼此为 Pareto 非支配关系,此时按照定义 3 的第 3 种情况比较它们的综合值,然后确定 i A2R 支配 j . 在图 3(c)和(d)中, i 和 j 分别位于不同的关联区域内以及均位于关联区域外,此时按照定义 3 的第 1 种情况比较它们的 Pareto 支配关系以确定支配情况,即在图 3(c)和(d)中, i A2R 支配 j .

定义 4 (A2R 非支配关系)设个体 i 和 j 是高维目标种群 P 中任意的两个个体,若 $i \not\prec_{A2R} j$ 且 $j \not\prec_{A2R} i$ 成立,则称 i 和 j 是 A2R 非支配关系.

3 MaOEA/A2R 算法

改善高维多目标进化算法的关键在于如何较好地

平衡解群的收敛性与多样性. 一方面, 基于 L_p -范式 ($p < 1$) 的距离度量^[4]可在高维目标空间中较好地评估不同解点之间的距离; 另一方面, A2R 支配关系可动态地精确评估解个体的质量. 鉴于此, 将 A2R 支配关系和 L_p -范式 ($p < 1$) 距离度量方法引入经典的 NSGA-II 框架^[15], 以分别替代其原有的支配方法进而距离度量方式, 据此设计一种于 A2R 支配方法的高维多目标进化算法 MaOEA/A2R. 算法 1 给出了 MaOEA/A2R 算法的流程.

算法 1 MaOEA/A2R

输入: 种群规模 N ; MaOP 目标数目 M ; 最大迭代次数 t_{\max}

输出: 最末代种群 P_{\max}

1. 初始化
 - 1.1 初始化代数迭代器 $t=0$
 - 1.2 在待解问题的可行决策空间内随机产生 N 个初始个体组成初始种群 P_0 , 并计算 P_0 中各解点的目标值向量 $\{F_1(0), F_2(0), \dots, F_M(0)\}$
 - 1.3 利用两层参考向量方法^[12]产生一定数目的参考向量集合 $\omega \leftarrow$ two_layered_generation_method(M, H_1, H_2)
2. WHILE ($t < t_{\max}$)
 3. 构建交配池: $P_t^{\text{mat}} = \text{Mating_selection}(P_t)$
 4. 重组运算: $P_t^{\text{rec}} = \text{Recombination}(P_t^{\text{mat}})$
 5. 变异运算: $P_t^{\text{ofs}} = \text{Mutation}(P_t^{\text{rec}})$
 6. 合并子种群和父种群: $R_t = P_t \cup P_t^{\text{ofs}}$
 7. 计算种群极值点 $F^{\min}(x)$ 和 $F^{\max}(x)$
 8. 计算种群的规范化目标解点: $R_t \leftarrow (R_t, F^{\min}(x), F^{\max}(x))$
 9. 保留 R_t 中的边界点
 10. 构建各参考向量的关联区域
 11. 将 R_t 中个体与关联区域进行关联
 12. 计算关联区域内各个体的 d_1 和 d_2 距离
 13. 利用 A2R 非支配排序方法划分 R_t 以获得若干非支配层 $\{F_1, F_2, \dots\} \leftarrow$ A2R_based_nondomination_sorting(R_t); F_i 表示第 i 层 A2R 非劣支配层
 14. 确定最小的 k 值, 使其满足 $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| \geq N$
 15. IF $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| > N$ THEN
 16. 计算最末 A2R 非劣支配层 F_k 各个体基于 L_p -范式 ($p < 1$) 的拥挤距离, 并从 F_k 层上删除 $(|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| - N)$ 各具有较小拥挤距离的个体
 17. END IF
 18. $P_{t+1} = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$
 19. 更新迭代计数器: $t = t + 1$
 20. END WHILE
 21. 输出最末代种群 P_{\max}

MaOEA/A2R 算法的第 1 步产生规模为 N 的初始种群 P_0 , 并利用两层参考向量生成方法产生一定数目的参考向量集 ω . 算法的第 2 步开始进入 WHILE 循环体. 第 3~5 步利用仿二进制交叉和多项式变异方法产生子代种群. 第 6 步将父代种群和子代种群合并成联合种群 R_t . 第 7~8 步对 R_t 中个体进行规范化处理. 第 9 步保

留 R_t 中的边界点以改善多样性. 第 10~11 步将 R_t 中个体与参考向量关联区域进行指派, 其结果是部分个体属于某关联区域而部分个体不属于任何关联区域. 第 12 步计算各关联区域内个体的 d_1 和 d_2 距离. 第 13~19 步利用 A2R 非支配排序方法对 R_t 进行划分, 以获得若干非劣支配层. 然后根据非劣层的等级以及利用基于 L_p -范式 ($p < 1$) 的拥挤距离的方法选择一定数目的个体组成下一代种群 P_{t+1} . 最后, 第 21 步输出最末代种群 P_{\max} 视为算法最终获得的近似解集.

设 N 表示种群规模, M 表示 MaOP 的目标数, 决策空间的维度为 n , 算法最大的迭代次数为 T_{\max} , MaOEA/A2R 算法时间复杂度分析如下:

(1) 第 1 步初始化阶段包含 3 个子步, 其中初始化迭代器的时间为 $O(1)$, 生成初始群体 P_0 的时间为 $O(Nn)$, 生成参考向量集合的时间为 $O(NM)$. 因此, 第 1 步的时间复杂度为 $O(1) + O(Nn) + O(NM) = \max(O(Nn), O(NM))$.

(2) 算法从第 2 步进入循环, 循环体内构建交配池、重组运算、变异运算以及合并父代和子代种群的时间复杂度均为 $O(Nn)$. 第 7~8 步计算种群极值点以及规范化目标解点的时间均为 $O(NM)$. 第 9 步保留边界点的时间为 $O(NM)$. 第 10~11 步构建各参考向量关联区域以及将 R_t 中个体与关联区域进行关联的时间均为 $O(NM)$. 第 12 步计算关联区域内个体的 d_1 和 d_2 距离的时间为 $O(N^2)$. 第 13 步利用 A2R 非支配排序方法对 R_t 进行分层的时间是 $O(N^2M)$. 第 14 步确定最小的 k 值所需时间为 $O(N)$. 第 16 步对最末非支配层 F_k 上个体基于 L_p -范式 ($p < 1$) 计算拥挤距离的时间为 $O(M(2N)\log(2N))$. 第 18 步的时间复杂度为 $O(N)$. 第 19 步的时间复杂度为 $O(1)$. 因此循环体内的时间复杂度应为 $O(Nn) + O(NM) + O(N^2) + O(MN^2) + O(M(2N)\log(2N)) + O(N) + O(1) = O(MN^2)$. 由于算法最多迭代 t_{\max} 次, 因此循环体内的时间复杂度为 $O(MN^2t_{\max})$.

(3) 第 21 步输出最末代种群的时间为 $O(NM)$.

综上, MaOEA/A2R 算法的时间复杂度为 $\max(O(Nn), O(NM)) + O(MN^2t_{\max}) + O(NM) = O(MN^2t_{\max})$. 不难看出, MaOEA/A2R 算法的时间复杂度取决于其所采用的非支配排序方法.

4 实验与分析

4.1 对比算法

为验证 MaOEA/A2R 算法的性能, 这里选取 5 种新近发展的高效的 MaOEA 算法, 如 RVEA (Reference Vector-guided Evolutionary Algorithm)^[20]、NSGA-II/SDR^[10]、MaOEA/IGD^[21]、MOEA/D-UR^[22]、PeEA (Pareto front shape estimation based Evolutionary Algorithm)^[23],

作为对比算法检验本文算法的性能. 选择它们的原因有以下几点:

(1) RVEA 利用基于角度惩罚距离 (Angle-Penalized Distance, APD) 的方法平衡高维目标空间中解个体的收敛性与多样性, 且为新近发展的一种优秀的 MaOEA. RVEA 和 MaOEA/A2R 都致力于有效平衡高维目标空间中解群的收敛性与多样性.

(2) NSGA-II/SDR 通过设计一种增强支配关系以及一种自适应小生境策略来平衡算法的收敛性和多样性, 未引入额外参数, 其与 MaOEA/A2R 类似, 均属于改进支配关系类型的算法.

(3) MaOEA/IGD 是一种基于性能指标的高维多目标进化算法, 其核心在于利用基于分解的最差点估计方法 (DNPE) 计算最差点. 与 MaOEA/A2R 类似, MaOEA/IGD 利用一种兼容 Pareto 支配的排序方法对种群进行划分. 这里选取 MaOEA/IGD 作为基于性能指标类型算法的典型范例.

(4) MOEA/D-UR 是新近提出的一种按需调整权重的 MOEA/D, 该算法利用指标度量解集质量的改善程度以确定何时调整权重. 此外, 采用一种新的策略对目标空间进行划分以增强收敛性. 这里选取 MOEA/D-UR 作为基于分解类型算法的典型范例.

(5) PeEA 以在线的方式估计 PF 曲率以自适应地选择个体, 它利用可达标量函数 (Achievement Scalarizing Function, ASF) 确定关节解以推测 PF 的几何信息. 这里选取 PeEA 作为对比算法是因为其是新近提出的一种较新颖且解题性能较好的 MaOEA.

4.2 测试函数

为测试 MaOEA 算法的性能, 这里选取 DTLZ^[16] 和 WFG^[17] 两个系列的测试问题集, 考察算法在 5-、10-、15- 和 20- 目标的 DTLZ1-DTLZ7 以及 WFG1-WFG9 等测试实例上的性能表现. 之所以选择这两个测试集其原因在于: 首先, 这两个系列的测试问题其目标数和决策变量数目均是可扩展的; 其次, DTLZ 和 WFG 系列函数真实 PF 是已知的, 它们的 PF 具有不同的难度特点, 其对算法逼近真实 PF 构成了巨大挑战.

4.3 性能指标

为评估 MaOEA 性能, 这里选取反转世代距离 IGD^[18] 和超体积 HV^[19] 两个指标评估算法所获近似解集的收敛性与多样性, 具体如下.

假设 P 是 MOP 问题真实 PF 的代表解集, A 是算法获得的近似 Pareto 解集, IGD 指标可利用式 (3) 进行计算:

$$\text{IGD}(A, P) = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} \text{Dist}_i \quad (3)$$

其中, $\text{Dist}_i = \min_{j=1}^{|A|} \sqrt{\sum_{k=1}^M \left(\frac{f_k(p_i) - f_k(a_j)}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \right)^2}$, 为归一化后的

最小欧氏距离; f_k^{\max} 和 f_k^{\min} 分别表示集合 P 在第 k 个目标上获得的最大值和最小值; $p_i \in P, i = 1, 2, \dots, |P|$, $a_j \in A, j = 1, 2, \dots, |A|$. 实验对各测试函数采样 10 000 个均匀分布的 Pareto 解点作为真实 Pareto 前沿的代表来计算 IGD 值.

给定一个近似的 Pareto 解集 A , 其 HV 值计算如下:

$$\text{HV}(A) = A \left(\bigcup_{p \in A} \{x | p \succ x \succ x_{\text{ref}}\} \right) \quad (4)$$

其中, A 为 Lebesgue 测度; x_{ref} 为参照点. 对于 2-目标问题, HV 是坐标区域的面积; 对于 3-目标问题, HV 是三维空间构成的体积; 对于 4 维及以上目标的问题, HV 表示超体值. 通常, HV 值越大, 表示解集的质量越高, 亦即解集的收敛性与多样性就越好.

4.4 统计方法

实验利用显著水平为 0.05 的 Wilcoxon 秩和检验来分析各算法获得近似解集的 IGD 和 HV 性能指标在统计意义上的差异. 各算法在每个测试实例上均独立执行 30 次以尽量减少随机因素的影响.

4.5 实验环境

本文所有的实验均在 HP OMEN8 计算机上执行, 计算机的配置是 CPU: 12th Gen Intel (R) Core (TM) i5-12500H; 主频: 2.50 GHz; 内存: 16.0 GB; Windows 11 64 位操作系统. 实验中各算法均在 PlatEMO 平台^[24] 上实现.

4.6 实验参数设置

实验中所涉及的参数包括各算法的共有参数和特有参数, 具体如下:

(1) 共有参数方面. 对于 5-、10-、15- 和 20- 目标的测试实例, 实验均分配 50 000 次函数评估. 另外, 由于 RVEA 和 MaOEA/A2R 均利用两层生成方法产生一定数目的权重向量, 因此它们的种群规模需要与参考向量数目保持一致. 实验中, 对于 5-目标、10-目标、15-目标和 20-目标的测试实例, 两算法的种群规模均分别设为 212、276、136 和 232. 此外, NSGA-II/SDR、MOEA/D-UR、PeEA 和 MaOEA/A2R 都利用仿二二进制交叉 (Simulated Binary Crossover, SBX) 和多项式变异 (Polynomial Mutation operators, PM) 产生新个体, 其中 SBX 和 PM 算子的参数按表 1 设置, 而 RVEA 中的变化算子除交叉分布指数 η_c 取值为 30 外, 其余参数值仍按表 1 设置.

(2) 特有参数方面. 各对比算法特有的参数按它们原始文献中的建议值设置.

4.7 实验结果与分析

为验证 MaOEA/A2R 的有效性, 这里将其与 RVEA、NSGA-II/SDR、MaOEA/IGD、MOEA/D-UR 和 PeEA 算法

表1 实验中SBX和PM算子的参数设置

参数	取值
SBX交叉的概率(p_c)	1.0
SBX交叉的分布指数(η_c)	20
PM的变异概率(p_m)	$1/n$ (n 为决策变量数目)
PM的分布指数(η_m)	20

在5-、10-、15-和20-目标的DTLZ和WFG系列测试函数上进行IGD和HV性能的比较。表2和表3分别列出了6种算法在DTLZ和WFG系列测试问题上所获得的IGD均值和方差。表内各行最佳结果用粗体凸显(下同)。

表2给出了6个算法在28个DTLZ测试实例上的所获得的IGD均值与方差,其中MaOEA/A2R、RVEA、NSGA-II/SDR、MOEA/D-UR和PeEA算法在这些测试实例上获得最佳IGD均值的个数分别为12、2、2、8、4;而MaOEA/IGD无一能获得最佳的IGD均值。另外,从表2的Wilcoxon秩和检验结果来看, MaOEA/A2R相对于RVEA、NSGA-II/SDR、MaOEA/IGD、MOEA/D-UR和PeEA的净胜得分(即得“+”的数目减去得“-”的数目,下同)分别为3、0、14、2和2。但需指出,在DTLZ5和DTLZ6问题上,MOEA/D-UR获得了比MaOEA/A2R更好的结果。究其原因,DTLZ5和DTLZ6两测试问题的PF退化成一条曲线,MOEA/D-UR通过对权重向量的调整可较好地克服该问题。另外,MOEA/D-UR采用了一种新的策略(算子)对目标空间进行划分,增强了算法的收敛性。因此,MOEA/D-UR在DTLZ5、DTLZ6两测试问题上表现了显著较优的性能。相比之下, MaOEA/A2R致力于自适应平衡收敛性与多样性,当待解问题的PF退化成曲线时其收敛性不强。另外,在DTLZ7问题上,PeEA获得了比MaOEA/A2R更优的性能。究其原因,DTLZ7问题对近似解集在不同PF面保持均匀分布构成挑战。由于PeEA通过在线方式估计PF的曲率以推测PF的几何信息,因此它在求解此类问题时可较地将解集分布于不同的PF上,可获得较好的性能。相比之下, MaOEA/A2R并未针对具有不同PF面的问题而采用针对性的选择策略,因而在DTLZ7问题上,其性能上不及PeEA。

表3列出了6个算法在36个WFG测试实例上获得的IGD均值和方差,其中MaOEA/A2R、RVEA、MOEA/D-UR和PeEA获得最佳IGD均值的个数分别为17、13、5、1,而NSGA-II/SDR和MaOEA/IGD算法均未能获得任何最佳IGD均值。从表3的Wilcoxon秩和检验结果来看, MaOEA/A2R相对于RVEA、NSGA-II/SDR、MaOEA/IGD、MOEA/D-UR和PeEA所获得的净胜得分分别为1、23、27、18和19。但需指出,在WFG2问题上,RVEA表现出较MaOEA/A2R更好的性能。究其原因,WFG2具有凸型且不连续等特征,RVEA利用角度惩罚距离和参考向

量再生的策略改善了其在求解不规则PF问题的性能,而MaOEA/A2R并未专门针对具有不规则PF的问题而实施一定策略。另外,在WFG3问题上,MOEA/D-UR取得了比MaOEA/A2R更好的性能,其原因在于:WFG3属一类退化的问题,MOEA/D-UR通过对权重向量进行调整以及新的目标空间划分算子等实现对PF的逼近,能获得较好的收敛性与多样性。总体上, MaOEA/A2R相比其他几种对比算法表现出一定的性能优势。究其原因, MaOEA/A2R利用A2R支配关系在进化过程中自动调整关联区域的大小,能有效地平衡算法的收敛性与多样性。另外, MaOEA/A2R采用基于 L_p -范式($p=1/M$)的拥挤距离较精确地度量高维目标空间解个体的邻域密度,改善了多样性。在上述两种策略的作用下, MaOEA/A2R取得了相对较好的收敛性与多样性优势。

进一步地,为验证A2R支配方法在高维多目标进化优化中的有效性,将A2R支配和几种代表性的改进的支配方法,如grid支配、 θ -支配、SDR支配和AD-支配,分别导入到简单的EA算法框架中并由此构造几种简单的MaOEA算法。表4给出了几种新构造的MaOEA算法在5-和10-目标的DTLZ系列测试问题上所获得的IGD均值和方差。

从表4可知,在全部14个DTLZ测试例中,使用A2R支配的进化算法获得7个最佳的IGD均值,利用SDR支配的算法获得5个最佳的IGD均值,采用grid支配和AD-支配的算法均获得1个最佳的IGD均值。需指出的是,在DTLZ5和DTLZ6问题上,SDR支配获得了比A2R支配更好的结果。究其原因,此类测试问题的PF退化成一条曲线,SDR支配基于一种自适应小生境策略设计支配关系,在PF退化成一条曲线时可以提高收敛程度,相比之下,A2R支配致力于自适应平衡收敛性与多样性,当待解问题的PF退化成曲线时其收敛性不强。另外,从表4的Wilcoxon秩和检验的结果来看,采用A2R支配的进化算法的性能优于使用其他支配关系的进化算法。比如,从净胜得分来看,A2R支配相对于grid支配、 θ -支配、SDR支配和AD-支配所获得的净胜得分分别为9、8、2和10。由此可见,A2R支配相比其他几种改进的支配关系,其具有优异的收敛性和多样性的能力。究其原因,A2R支配可以在进化过程中构建参考向量关联区域,且随种群进化自适应调整其大小,具有平衡种群收敛性与多样性的效果。

不仅如此,为直观比较6种算法的收敛速度,图4和图5分别描绘了各算法在15-目标的DTLZ4(DTLZ4(15))和15-目标的WFG9(WFG9(15))测试实例上获得的IGD均值随评估次数(EN)增长而变化的轨迹。为获得稳定且可靠的结果,各算法在测试实例上均独立执行30次,每次运行所需的评估次数设为100 000。

表 2 各算法在四种目标维度的 DTLZ 系列测试问题上获得的 IGD 均值与方差

测试问题	目标数目	MaOEA/A2R	RVEA	NSGA-II/SDR	MaOEA/IGD	MOEA/D-UR	PeEA
DTLZ1	5	1.151 3×10 ⁰ (6.70×10 ⁻¹)	2.043 8×10 ¹ (4.84×10 ⁰) -	7.598 5×10 ⁰ (2.91×10 ⁰) -	5.416 4×10 ¹ (2.18×10 ¹) -	9.639 5×10 ⁰ (4.25×10 ⁰) -	1.656 2×10 ¹ (5.55×10 ¹) -
	10	5.281 9×10 ⁰ (3.16×10 ⁰)	1.298 8×10 ¹ (4.26×10 ⁰) -	7.173 6×10 ⁰ (2.62×10 ⁰) -	2.639 6×10 ¹ (1.37×10 ¹) -	7.956 4×10 ⁰ (3.72×10 ⁰) -	2.585 2×10 ¹ (1.28×10 ¹) -
	15	5.258 0×10 ⁻¹ (2.32×10 ⁻¹)	1.370 5×10 ⁰ (7.01×10 ⁻¹) -	6.920 7×10 ⁻¹ (3.02×10 ⁻¹) -	1.021 0×10 ¹ (4.51×10 ⁰) -	1.988 6×10 ⁰ (1.45×10 ⁰) -	6.641 0×10 ⁻¹ (4.51×10 ⁻¹) =
	20	5.238 0×10 ⁻¹ (5.59×10 ⁻²)	5.749 9×10 ⁻¹ (5.28×10 ⁻¹) =	6.449 9×10 ⁻¹ (3.09×10 ⁻¹) =	1.811 4×10 ⁰ (1.32×10 ⁰) -	5.708 6×10 ⁻¹ (4.82×10 ⁻¹) =	2.376 6×10 ¹ (9.67×10 ⁰) -
DTLZ2	5	1.635 3×10 ⁻¹ (1.99×10 ⁻³)	1.662 1×10 ⁻¹ (1.41×10 ⁻⁴) -	2.205 5×10 ⁻¹ (9.75×10 ⁻²) -	2.344 2×10 ⁻¹ (3.56×10 ⁻²) -	1.709 8×10 ⁻¹ (1.38×10 ⁻³) -	1.760 9×10 ⁻¹ (3.14×10 ⁻³) -
	10	4.165 7×10 ⁻¹ (4.79×10 ⁻³)	4.303 4×10 ⁻¹ (1.66×10 ⁻³) -	4.424 6×10 ⁻¹ (7.83×10 ⁻³) -	6.344 4×10 ⁻¹ (1.83×10 ⁻¹) -	4.351 9×10 ⁻¹ (2.71×10 ⁻²) -	4.200 2×10 ⁻¹ (3.67×10 ⁻³) -
	15	6.381 5×10 ⁻¹ (2.73×10 ⁻²)	6.348 6×10 ⁻¹ (2.48×10 ⁻²) =	8.005 4×10 ⁻¹ (9.02×10 ⁻²) -	9.650 5×10 ⁻¹ (9.98×10 ⁻²) -	7.582 2×10 ⁻¹ (4.98×10 ⁻²) -	6.482 8×10 ⁻¹ (6.06×10 ⁻²) =
	20	6.835 8×10 ⁻¹ (1.90×10 ⁻²)	7.656 4×10 ⁻¹ (3.59×10 ⁻²) -	6.829 0×10 ⁻¹ (3.12×10 ⁻²) =	8.336 6×10 ⁻¹ (5.60×10 ⁻²) -	8.709 0×10 ⁻¹ (3.69×10 ⁻²) -	7.342 1×10 ⁻¹ (6.83×10 ⁻²) -
DTLZ3	5	2.843 5×10 ⁰ (1.75×10 ⁰)	8.225 4×10 ¹ (2.27×10 ¹) -	2.811 6×10 ¹ (9.18×10 ⁰) -	1.742 7×10 ² (5.22×10 ¹) -	1.952 1×10 ¹ (7.26×10 ⁰) -	3.282 1×10 ¹ (1.10×10 ¹) -
	10	2.771 6×10 ⁰ (2.09×10 ⁰)	5.988 6×10 ¹ (1.66×10 ¹) -	1.478 0×10 ¹ (4.34×10 ⁰) -	1.008 2×10 ² (3.78×10 ¹) -	1.250 3×10 ¹ (6.06×10 ⁰) -	3.301 8×10 ¹ (2.17×10 ¹) -
	15	1.106 5×10 ⁰ (2.77×10 ⁻¹)	1.149 9×10 ¹ (5.59×10 ⁰) -	1.829 2×10 ⁰ (1.22×10 ⁰) -	2.967 3×10 ¹ (9.84×10 ⁰) -	2.986 0×10 ⁰ (3.83×10 ⁰) -	7.227 7×10 ⁰ (5.48×10 ⁰) -
	20	2.431 9×10 ⁰ (2.90×10 ⁰)	3.491 9×10 ⁰ (2.02×10 ⁰) -	9.004 2×10 ⁻¹ (2.48×10 ⁻¹) +	4.918 5×10 ⁰ (2.11×10 ⁰) -	1.199 6×10 ⁰ (3.19×10 ⁻¹) +	1.453 7×10 ² (6.46×10 ¹) -
DTLZ4	5	1.695 4×10 ⁻¹ (1.09×10 ⁻³)	1.661 9×10 ⁻¹ (2.32×10 ⁻⁴) +	6.617 2×10 ⁻¹ (7.02×10 ⁻²) -	3.993 7×10 ⁻¹ (1.99×10 ⁻¹) -	2.088 3×10 ⁻¹ (7.93×10 ⁻²) -	1.734 6×10 ⁻¹ (1.63×10 ⁻³) -
	10	4.182 6×10 ⁻¹ (3.42×10 ⁻³)	4.401 9×10 ⁻¹ (3.00×10 ⁻³) -	7.939 4×10 ⁻¹ (8.14×10 ⁻²) -	5.121 6×10 ⁻¹ (6.99×10 ⁻²) -	4.432 2×10 ⁻¹ (3.13×10 ⁻²) -	4.364 7×10 ⁻¹ (1.08×10 ⁻¹) =
	15	6.038 9×10 ⁻¹ (5.96×10 ⁻³)	6.313 2×10 ⁻¹ (5.44×10 ⁻³) -	8.109 1×10 ⁻¹ (1.27×10 ⁻²) -	7.027 1×10 ⁻¹ (4.57×10 ⁻²) -	6.623 2×10 ⁻¹ (3.25×10 ⁻²) -	6.086 5×10 ⁻¹ (5.28×10 ⁻²) -
	20	6.205 0×10 ⁻¹ (3.09×10 ⁻³)	6.228 8×10 ⁻¹ (8.84×10 ⁻⁵) -	7.922 2×10 ⁻¹ (4.25×10 ⁻²) -	6.341 5×10 ⁻¹ (9.21×10 ⁻³) -	6.487 7×10 ⁻¹ (1.31×10 ⁻²) -	6.331 4×10 ⁻¹ (4.62×10 ⁻²) =
DTLZ5	5	3.633 1×10 ⁻¹ (1.23×10 ⁻¹)	1.968 8×10 ⁻¹ (2.58×10 ⁻²) +	5.996 7×10 ⁻² (1.12×10 ⁻²) +	5.462 8×10 ⁻¹ (1.59×10 ⁻¹) -	1.146 9×10 ⁻² (2.27×10 ⁻³) +	1.211 3×10 ⁻¹ (2.53×10 ⁻¹) +
	10	4.852 1×10 ⁻¹ (9.90×10 ⁻²)	3.629 2×10 ⁻¹ (6.53×10 ⁻²) +	1.893 4×10 ⁻¹ (2.85×10 ⁻²) +	5.659 1×10 ⁻¹ (1.97×10 ⁻¹) =	1.319 7×10 ⁻² (2.77×10 ⁻³) +	1.410 7×10 ⁻¹ (1.70×10 ⁻²) +
	15	6.869 2×10 ⁻¹ (5.55×10 ⁻²)	4.008 3×10 ⁻¹ (1.84×10 ⁻¹) +	8.977 5×10 ⁻² (1.80×10 ⁻²) +	6.314 7×10 ⁻¹ (1.87×10 ⁻¹) +	2.337 0×10 ⁻² (6.78×10 ⁻³) +	2.209 1×10 ⁻¹ (4.16×10 ⁻²) +
	20	5.957 1×10 ⁻¹ (9.35×10 ⁻²)	3.901 7×10 ⁻¹ (2.13×10 ⁻¹) +	1.101 9×10 ⁻¹ (1.88×10 ⁻²) +	2.876 8×10 ⁻¹ (9.93×10 ⁻²) +	1.566 3×10 ⁻² (4.35×10 ⁻³) +	2.611 1×10 ⁻¹ (1.46×10 ⁻¹) +
DTLZ6	5	7.743 9×10 ⁻¹ (2.55×10 ⁻¹)	3.467 9×10 ⁻¹ (1.78×10 ⁻¹) +	1.950 9×10 ⁻¹ (5.45×10 ⁻²) +	3.276 9×10 ⁰ (1.18×10 ⁰) -	1.143 0×10 ⁻² (2.82×10 ⁻³) +	1.262 3×10 ⁻¹ (1.01×10 ⁻¹) +
	10	1.584 9×10 ⁰ (6.57×10 ⁻¹)	6.639 0×10 ⁻¹ (4.09×10 ⁻¹) +	3.015 1×10 ⁻¹ (1.37×10 ⁻¹) +	2.385 4×10 ⁰ (1.03×10 ⁰) -	1.131 9×10 ⁻² (3.53×10 ⁻³) +	3.509 6×10 ⁻¹ (3.18×10 ⁻¹) +
	15	7.870 9×10 ⁻¹ (3.79×10 ⁻¹)	2.376 9×10 ⁻¹ (6.89×10 ⁻²) +	1.159 9×10 ⁻¹ (2.17×10 ⁻²) +	2.368 7×10 ⁰ (1.20×10 ⁰) -	2.770 1×10 ⁻² (9.44×10 ⁻³) +	1.757 7×10 ⁻¹ (5.12×10 ⁻²) +
	20	6.723 3×10 ⁻¹ (1.53×10 ⁻¹)	2.420 7×10 ⁻¹ (6.72×10 ⁻²) +	1.138 0×10 ⁻¹ (2.19×10 ⁻²) +	4.014 5×10 ⁻¹ (3.25×10 ⁻²) +	1.293 2×10 ⁻² (2.81×10 ⁻³) +	2.005 3×10 ⁰ (1.18×10 ⁰) -

续表

测试问题	目标数目	MaOEA/A2R	RVEA	NSGA-II/SDR	MaOEA/IGD	MOEA/D-UR	PeEA
DTLZ7	5	4.497 6×10 ⁻¹ (6.20×10 ⁻²)	4.990 4×10 ⁻¹ (9.46×10 ⁻³) -	3.391 1×10 ⁻¹ (3.16×10 ⁻²) +	7.382 0×10 ⁻¹ (6.27×10 ⁻²) -	4.273 3×10 ⁻¹ (1.99×10 ⁻²) =	2.473 7×10 ⁻¹ (7.50×10 ⁻³) +
	10	2.305 0×10 ⁰ (9.74×10 ⁻¹)	1.763 7×10 ⁰ (3.92×10 ⁻¹) =	1.391 6×10 ⁰ (2.97×10 ⁻¹) +	1.511 0×10 ⁰ (7.82×10 ⁻²) +	1.414 1×10 ⁰ (1.89×10 ⁻¹) +	9.907 5×10 ⁻¹ (1.03×10 ⁻¹) +
	15	8.132 8×10 ⁰ (1.31×10 ⁰)	2.447 8×10 ⁰ (2.77×10 ⁻¹) +	4.396 2×10 ⁰ (6.93×10 ⁻¹) +	2.636 2×10 ⁰ (1.28×10 ⁻¹) +	2.305 2×10 ⁰ (5.13×10 ⁻¹) +	1.764 3×10 ⁰ (4.35×10 ⁻¹) +
	20	1.100 4×10 ¹ (1.28×10 ⁰)	2.876 1×10 ⁰ (4.53×10 ⁻¹) +	7.220 6×10 ⁰ (7.94×10 ⁻¹) +	3.491 2×10 ⁰ (1.57×10 ⁻¹) +	3.133 7×10 ⁰ (6.58×10 ⁻¹) +	1.903 0×10 ⁰ (9.36×10 ⁻²) +
+/-/=			11/14/3	13/13/2	6/21/1	12/14/2	11/13/4

注：“+”、“-”和“=”分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于MaOEA/A2R算法所获得的结果。

表3 各算法在4种目标维度的WFG系列问题上获得的IGD均值与方差

测试问题	目标数目	MaOEA/A2R	RVEA	NSGA-II/SDR	MaOEA/IGD	MOEA/D-UR	PeEA
WFG1	5	1.208 4×10 ⁰ (1.31×10 ⁻¹)	1.057 4×10 ⁰ (8.99×10 ⁻²) +	7.753 0×10 ⁻¹ (5.24×10 ⁻²) +	1.425 5×10 ⁰ (6.47×10 ⁻¹) -	7.638 2×10 ⁻¹ (5.82×10 ⁻²) +	7.136 5×10 ⁻¹ (6.19×10 ⁻²) +
	10	2.009 9×10 ⁰ (8.96×10 ⁻²)	1.699 6×10 ⁰ (1.60×10 ⁻¹) +	1.741 3×10 ⁰ (6.23×10 ⁻²) +	2.224 0×10 ⁰ (2.00×10 ⁻¹) -	1.677 8×10 ⁰ (9.35×10 ⁻²) +	1.775 8×10 ⁰ (3.82×10 ⁻¹) +
	15	2.215 0×10 ⁰ (1.06×10 ⁻¹)	1.921 6×10 ⁰ (8.54×10 ⁻²) +	2.495 5×10 ⁰ (3.98×10 ⁻²) -	7.563 1×10 ⁰ (6.60×10 ⁰) -	2.280 4×10 ⁰ (9.10×10 ⁻²) -	2.042 0×10 ⁰ (3.56×10 ⁻¹) +
	20	4.156 5×10 ⁰ (1.32×10 ⁻¹)	4.120 1×10 ⁰ (1.39×10 ⁻¹) =	5.144 3×10 ⁰ (5.74×10 ⁻²) -	5.456 9×10 ⁰ (1.12×10 ⁰) -	4.774 9×10 ⁰ (1.89×10 ⁻¹) -	4.833 6×10 ⁰ (4.88×10 ⁻¹) -
WFG2	5	5.014 2×10 ⁻¹ (2.80×10 ⁻²)	3.998 2×10 ⁻¹ (1.32×10 ⁻²) +	5.278 6×10 ⁻¹ (4.33×10 ⁻²) -	1.090 3×10 ⁰ (3.95×10 ⁻¹) -	4.330 7×10 ⁻¹ (1.02×10 ⁻²) +	5.290 3×10 ⁻¹ (4.34×10 ⁻²) -
	10	1.235 0×10 ⁰ (4.86×10 ⁻²)	1.147 1×10 ⁰ (5.06×10 ⁻²) +	1.618 0×10 ⁰ (1.32×10 ⁻¹) -	2.054 8×10 ⁰ (1.46×10 ⁻¹) -	1.213 6×10 ⁰ (6.11×10 ⁻²) =	1.347 5×10 ⁰ (9.68×10 ⁻²) -
	15	1.914 9×10 ⁰ (1.38×10 ⁻¹)	1.730 5×10 ⁰ (8.56×10 ⁻²) +	2.399 6×10 ⁰ (6.32×10 ⁻²) -	4.172 9×10 ⁰ (4.82×10 ⁰) -	1.973 3×10 ⁰ (1.53×10 ⁻¹) =	1.955 4×10 ⁰ (1.11×10 ⁻¹) =
	20	3.628 1×10 ⁰ (2.50×10 ⁻¹)	3.368 5×10 ⁰ (1.64×10 ⁻¹) +	5.224 5×10 ⁰ (6.66×10 ⁻²) -	4.600 7×10 ⁰ (1.90×10 ⁰) -	3.792 5×10 ⁰ (1.33×10 ⁻¹) -	4.477 7×10 ⁰ (3.65×10 ⁻¹) -
WFG3	5	1.235 3×10 ⁰ (2.31×10 ⁻¹)	5.153 7×10 ⁻¹ (3.58×10 ⁻²) +	2.607 6×10 ⁻¹ (2.73×10 ⁻²) +	5.092 0×10 ⁰ (1.28×10 ⁰) -	2.044 1×10 ⁻¹ (3.71×10 ⁻²) +	4.115 1×10 ⁻¹ (7.06×10 ⁻²) +
	10	4.750 7×10 ⁰ (7.90×10 ⁻¹)	3.194 6×10 ⁰ (5.79×10 ⁻¹) +	1.718 9×10 ⁰ (5.86×10 ⁻¹) +	2.068 4×10 ⁰ (1.33×10 ⁻¹) +	8.398 7×10 ⁻¹ (1.10×10 ⁻¹) +	1.057 6×10 ⁰ (2.02×10 ⁻¹) +
	15	7.874 2×10 ⁰ (7.32×10 ⁻¹)	8.721 2×10 ⁰ (2.34×10 ⁰) =	4.592 0×10 ⁰ (1.46×10 ⁰) +	5.861 6×10 ⁰ (2.12×10 ⁰) +	1.519 9×10 ⁰ (1.57×10 ⁻¹) +	2.133 3×10 ⁰ (4.43×10 ⁻¹) +
	20	9.656 0×10 ⁰ (5.48×10 ⁻¹)	9.405 6×10 ⁰ (2.84×10 ⁰) +	8.140 1×10 ⁰ (2.29×10 ⁰) +	7.375 2×10 ⁰ (4.41×10 ⁻¹) +	1.857 9×10 ⁰ (2.27×10 ⁻¹) +	9.339 7×10 ⁰ (1.90×10 ⁰) +
WFG4	5	9.539 9×10 ⁻¹ (5.41×10 ⁻³)	9.604 7×10 ⁻¹ (3.21×10 ⁻³) -	1.005 8×10 ⁰ (1.43×10 ⁻²) -	6.115 8×10 ⁰ (1.79×10 ⁰) -	9.895 0×10 ⁻¹ (8.69×10 ⁻³) -	1.189 8×10 ⁰ (2.60×10 ⁻²) -
	10	4.182 3×10 ⁰ (4.41×10 ⁻²)	4.372 1×10 ⁰ (5.23×10 ⁻²) -	4.425 8×10 ⁰ (5.69×10 ⁻²) -	5.709 7×10 ⁰ (2.40×10 ⁻¹) -	4.637 5×10 ⁰ (7.04×10 ⁻²) -	4.806 9×10 ⁰ (2.16×10 ⁻¹) -
	15	9.035 6×10 ⁰ (1.92×10 ⁻¹)	9.479 9×10 ⁰ (2.18×10 ⁻¹) -	9.851 8×10 ⁰ (1.25×10 ⁰) -	2.089 3×10 ¹ (3.62×10 ⁰) -	9.965 6×10 ⁰ (5.55×10 ⁻¹) -	1.110 4×10 ¹ (8.02×10 ⁻¹) -
	20	1.142 6×10 ¹ (3.01×10 ⁻¹)	1.194 3×10 ¹ (6.00×10 ⁻¹) -	1.443 4×10 ¹ (2.56×10 ⁰) -	1.251 5×10 ¹ (3.19×10 ⁰) -	1.520 4×10 ¹ (1.27×10 ⁰) -	1.272 2×10 ¹ (8.47×10 ⁻¹) -

续表

测试问题	目标数目	MaOEA/A2R	RVEA	NSGA-II/SDR	MaOEA/IGD	MOEA/D-UR	PeEA
WFG5	5	9.549 5×10 ⁻¹ (8.84×10 ⁻³)	9.545 6×10⁻¹ (1.40×10⁻³) =	1.002 1×10 ⁰ (1.72×10 ⁻²) -	5.423 3×10 ⁰ (2.57×10 ⁰) -	9.784 9×10 ⁻¹ (9.01×10 ⁻³) -	1.155 7×10 ⁰ (2.03×10 ⁻²) -
	10	4.193 8×10⁰ (5.72×10⁻²)	4.390 9×10 ⁰ (6.47×10 ⁻²) -	4.489 6×10 ⁰ (8.38×10 ⁻²) -	5.541 3×10 ⁰ (2.29×10 ⁻¹) -	4.519 2×10 ⁰ (3.07×10 ⁻²) -	4.939 1×10 ⁰ (9.83×10 ⁻²) -
	15	8.875 9×10⁰ (1.56×10⁻¹)	9.340 7×10 ⁰ (9.31×10 ⁻²) -	9.470 0×10 ⁰ (3.32×10 ⁻¹) -	2.672 9×10 ¹ (5.82×10 ⁰) -	9.576 2×10 ⁰ (3.77×10 ⁻¹) -	9.611 5×10 ⁰ (4.65×10 ⁻¹) -
	20	1.146 1×10¹ (1.71×10⁻¹)	1.318 9×10 ¹ (2.27×10 ⁻¹) -	1.212 1×10 ¹ (3.87×10 ⁻¹) -	1.490 5×10 ¹ (1.10×10 ¹) =	1.352 8×10 ¹ (4.16×10 ⁻¹) -	1.210 8×10 ¹ (6.17×10 ⁻¹) -
WFG6	5	9.600 2×10⁻¹ (8.06×10⁻³)	9.638 1×10 ⁻¹ (1.43×10 ⁻³) -	1.019 3×10 ⁰ (2.35×10 ⁻²) -	5.728 3×10 ⁰ (1.14×10 ⁰) -	9.974 9×10 ⁻¹ (1.05×10 ⁻²) -	1.204 9×10 ⁰ (6.26×10 ⁻²) -
	10	4.398 9×10 ⁰ (5.83×10 ⁻²)	4.394 7×10⁰ (9.19×10⁻²) =	4.562 6×10 ⁰ (9.07×10 ⁻²) -	6.106 5×10 ⁰ (5.49×10 ⁻¹) -	4.616 8×10 ⁰ (5.72×10 ⁻²) -	5.130 5×10 ⁰ (1.61×10 ⁻¹) -
	15	9.043 1×10⁰ (1.31×10⁻¹)	1.054 1×10 ¹ (6.98×10 ⁻¹) -	1.053 8×10 ¹ (1.46×10 ⁰) -	2.327 2×10 ¹ (5.89×10 ⁰) -	9.537 7×10 ⁰ (4.52×10 ⁻¹) -	9.861 2×10 ⁰ (4.56×10 ⁻¹) -
	20	1.124 8×10¹ (1.70×10⁻¹)	1.384 2×10 ¹ (6.98×10 ⁻¹) -	1.688 3×10 ¹ (1.13×10 ⁰) -	2.222 0×10 ¹ (1.21×10 ¹) -	1.451 6×10 ¹ (9.45×10 ⁻¹) -	1.216 8×10 ¹ (8.43×10 ⁻¹) -
WFG7	5	9.579 6×10⁻¹ (8.77×10⁻³)	9.639 6×10 ⁻¹ (2.87×10 ⁻³) -	1.016 1×10 ⁰ (2.31×10 ⁻²) -	5.462 7×10 ⁰ (8.18×10 ⁻¹) -	9.891 2×10 ⁻¹ (8.97×10 ⁻³) -	1.241 0×10 ⁰ (4.81×10 ⁻²) -
	10	4.437 7×10 ⁰ (6.75×10 ⁻²)	4.405 8×10⁰ (7.87×10⁻²) =	4.533 9×10 ⁰ (1.00×10 ⁻¹) -	6.062 0×10 ⁰ (6.03×10 ⁻¹) -	4.682 8×10 ⁰ (5.96×10 ⁻²) -	5.164 3×10 ⁰ (1.97×10 ⁻¹) -
	15	9.122 9×10⁰ (1.28×10⁻¹)	9.188 5×10 ⁰ (2.94×10 ⁻¹) =	1.115 7×10 ¹ (1.45×10 ⁰) -	2.650 1×10 ¹ (3.27×10 ⁰) -	9.661 6×10 ⁰ (4.49×10 ⁻¹) -	9.680 1×10 ⁰ (6.10×10 ⁻¹) -
	20	1.177 5×10 ¹ (1.92×10 ⁻¹)	1.172 0×10¹ (1.61×10⁻¹) =	1.314 9×10 ¹ (6.18×10 ⁻¹) -	1.393 4×10 ¹ (6.85×10 ⁰) =	1.433 1×10 ¹ (6.93×10 ⁻¹) -	1.266 5×10 ¹ (1.08×10 ⁰) -
WFG8	5	9.778 4×10 ⁻¹ (7.03×10 ⁻³)	9.672 1×10⁻¹ (2.80×10⁻³) +	1.017 1×10 ⁰ (1.83×10 ⁻²) -	4.580 6×10 ⁰ (2.00×10 ⁻¹) -	1.009 1×10 ⁰ (2.01×10 ⁻²) -	1.156 5×10 ⁰ (4.77×10 ⁻²) -
	10	4.481 3×10 ⁰ (1.77×10 ⁻¹)	4.300 0×10⁰ (8.13×10⁻²) +	4.450 9×10 ⁰ (8.96×10 ⁻²) =	6.207 0×10 ⁰ (1.63×10 ⁰) -	4.361 7×10 ⁰ (4.99×10 ⁻²) +	4.532 8×10 ⁰ (1.20×10 ⁻¹) =
	15	9.485 4×10⁰ (5.05×10⁻¹)	9.830 5×10 ⁰ (4.67×10 ⁻¹) -	1.048 6×10 ¹ (4.70×10 ⁻¹) -	2.395 3×10 ¹ (3.08×10 ⁰) -	1.045 6×10 ¹ (4.73×10 ⁻¹) -	1.044 8×10 ¹ (5.50×10 ⁻¹) -
	20	1.249 1×10¹ (7.25×10⁻¹)	1.264 6×10 ¹ (9.72×10 ⁻¹) =	1.438 7×10 ¹ (8.44×10 ⁻¹) -	3.178 0×10 ¹ (6.46×10 ⁰) -	1.636 2×10 ¹ (8.52×10 ⁻¹) -	1.311 7×10 ¹ (1.22×10 ⁰) -
WFG9	5	9.648 6×10⁻¹ (8.85×10⁻³)	9.671 0×10 ⁻¹ (1.01×10 ⁻²) =	9.912 8×10 ⁻¹ (1.35×10 ⁻²) -	3.230 5×10 ⁰ (1.13×10 ⁰) -	1.026 9×10 ⁰ (2.01×10 ⁻²) -	1.126 8×10 ⁰ (2.85×10 ⁻²) -
	10	4.239 5×10⁰ (5.43×10⁻²)	4.286 0×10 ⁰ (5.45×10 ⁻²) -	4.353 8×10 ⁰ (5.44×10 ⁻²) -	5.292 7×10 ⁰ (3.53×10 ⁻¹) -	4.725 5×10 ⁰ (6.83×10 ⁻²) -	4.633 8×10 ⁰ (8.56×10 ⁻²) -
	15	8.744 0×10⁰ (1.18×10⁻¹)	9.160 7×10 ⁰ (1.50×10 ⁻¹) -	9.501 0×10 ⁰ (1.34×10 ⁰) -	1.589 9×10 ¹ (8.57×10 ⁰) -	9.286 6×10 ⁰ (3.29×10 ⁻¹) -	9.050 0×10 ⁰ (5.51×10 ⁻¹) =
	20	1.176 4×10 ¹ (1.21×10 ⁻¹)	1.146 1×10¹ (2.90×10⁻¹) +	1.306 1×10 ¹ (9.17×10 ⁻¹) -	1.185 3×10 ¹ (7.68×10 ⁻¹) =	1.535 1×10 ¹ (1.06×10 ⁰) -	1.223 8×10 ¹ (6.93×10 ⁻¹) -
+/-/=			13/14/9	6/29/1	3/30/3	8/26/2	7/26/3

注：“+”、“-”和“=”分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于MaOEA/A2R算法所获得的结果。

表 4 5 种新构造的 MaOEA 算法在 5-和 10-目标的 DTLZ 系列测试问题上获得的 IGD 均值与方差

测试问题	目标数目	A2R 支配	grid 支配	θ -支配	SDR 支配	AD-支配
DTLZ1	5	$3.139 1 \times 10^1$ (1.04×10^1)	$1.758 4 \times 10^2$ (3.16×10^1) -	$8.088 3 \times 10^1$ (1.11×10^1) -	$4.685 6 \times 10^1$ (6.51×10^0) -	$9.716 9 \times 10^1$ (9.61×10^0) -
	10	$8.056 0 \times 10^0$ (5.08×10^0)	$2.465 8 \times 10^2$ (3.83×10^1) -	$1.481 6 \times 10^1$ (4.18×10^0) -	$3.551 0 \times 10^0$ (1.20×10^0) +	$1.232 4 \times 10^1$ (3.23×10^0) -
DTLZ2	5	$1.730 4 \times 10^{-1}$ (1.95×10^{-3})	$2.550 2 \times 10^{-1}$ (7.70×10^{-3}) -	$1.970 8 \times 10^{-1}$ (5.28×10^{-3}) -	$1.900 2 \times 10^{-1}$ (6.33×10^{-3}) -	$2.774 3 \times 10^{-1}$ (1.27×10^{-2}) -
	10	$4.073 0 \times 10^{-1}$ (3.20×10^{-3})	$1.641 4 \times 10^0$ (5.93×10^{-1}) -	$4.371 1 \times 10^{-1}$ (2.28×10^{-3}) -	$4.349 8 \times 10^{-1}$ (7.64×10^{-3}) -	$7.012 0 \times 10^{-1}$ (6.61×10^{-2}) -
DTLZ3	5	$6.905 7 \times 10^1$ (1.95×10^1)	$2.127 5 \times 10^2$ (3.24×10^1) -	$2.823 4 \times 10^2$ (3.86×10^1) -	$1.869 0 \times 10^2$ (2.49×10^1) -	$6.096 5 \times 10^2$ (1.32×10^2) -
	10	$4.031 6 \times 10^0$ (3.08×10^0)	$1.722 5 \times 10^2$ (3.56×10^1) -	$6.315 4 \times 10^1$ (1.56×10^1) -	$1.681 0 \times 10^1$ (6.27×10^0) -	$1.017 5 \times 10^3$ (9.54×10^1) -
DTLZ4	5	$1.756 1 \times 10^{-1}$ (1.95×10^{-3})	$2.529 2 \times 10^{-1}$ (1.22×10^{-2}) -	$2.120 9 \times 10^{-1}$ (8.21×10^{-3}) -	$6.764 0 \times 10^{-1}$ (8.63×10^{-2}) -	$3.489 5 \times 10^{-1}$ (1.06×10^{-1}) -
	10	$4.196 2 \times 10^{-1}$ (3.21×10^{-3})	$6.557 2 \times 10^{-1}$ (6.34×10^{-2}) -	$4.489 1 \times 10^{-1}$ (2.47×10^{-3}) -	$8.156 6 \times 10^{-1}$ (8.06×10^{-2}) -	$1.074 8 \times 10^0$ (8.75×10^{-2}) -
DTLZ5	5	$2.737 4 \times 10^{-1}$ (1.09×10^{-1})	$3.594 7 \times 10^{-1}$ (6.83×10^{-2}) -	$2.123 1 \times 10^{-1}$ (2.11×10^{-2}) +	$9.177 0 \times 10^{-2}$ (1.05×10^{-2}) +	$1.043 8 \times 10^0$ (1.90×10^{-1}) -
	10	$4.905 5 \times 10^{-1}$ (1.20×10^{-1})	$4.632 6 \times 10^{-1}$ (6.64×10^{-2}) =	$1.888 7 \times 10^{-1}$ (1.83×10^{-2}) +	$1.839 8 \times 10^{-1}$ (2.70×10^{-2}) +	$8.505 4 \times 10^{-1}$ (1.73×10^{-1}) -
DTLZ6	5	$4.075 2 \times 10^0$ (8.44×10^{-1})	$4.652 1 \times 10^0$ (5.24×10^{-1}) -	$9.168 1 \times 10^0$ (8.86×10^{-1}) -	$1.049 7 \times 10^0$ (5.08×10^{-1}) +	$1.892 7 \times 10^1$ (9.73×10^{-1}) -
	10	$1.498 7 \times 10^0$ (5.12×10^{-1})	$1.644 3 \times 10^1$ (1.04×10^0) -	$1.121 5 \times 10^0$ (4.40×10^{-1}) +	$2.953 9 \times 10^{-1}$ (1.44×10^{-1}) +	$1.618 8 \times 10^1$ (7.29×10^{-1}) -
DTLZ7	5	$5.185 0 \times 10^{-1}$ (1.11×10^{-1})	$3.403 0 \times 10^{-1}$ (2.61×10^{-2}) +	$1.522 4 \times 10^1$ (5.72×10^0) -	$7.592 7 \times 10^{-1}$ (1.31×10^{-1}) -	$2.570 3 \times 10^{-1}$ (4.05×10^{-2}) +
	10	$2.644 0 \times 10^0$ (1.12×10^0)	$8.560 0 \times 10^{-1}$ (3.55×10^{-2}) +	$2.861 5 \times 10^1$ (9.38×10^0) -	$1.148 1 \times 10^0$ (2.63×10^{-1}) +	$1.070 8 \times 10^0$ (5.00×10^{-2}) +
+/-/=			2/11/1	3/11/0	6/8/0	2/12/0

注：“+”、“-”和“=”分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于嵌入 A2R 支配的算法所获得的结果。

从图 4 可以看出,6 种算法随着评估次数 EN 的增大,它们所获得的 IGD 均值总体上呈现出变小的趋势.但相对而言, MaOEA/A2R 和 PeEA 获得的 IGD 均值下降最快,其次是 RVEA,随后为 NSGA-II/SDR 和 MOEA/D-UR,而 MaOEA/IGD 的表现相对较差. MaOEA/A2R、RVEA 和 PeEA 在经历初始约 1×10^4 次评估后,它们的 IGD 均值能较快下降至一个相对较小的值,而在后期进化中它们的 IGD 均值呈现出缓慢变小的态势. NSGA-II/SDR、MaOEA/IGD 分别在经历大约 1×10^4 、 3×10^4 次左右的评估之后它们 IGD 均值趋于平稳,但均维持一个相对较高的值. 由于 IGD 指标能够表征近似解集的收敛性和多样性,且 IGD 值越小表明算法获得的近似解集的质量越高,因此,图 4 的 IGD 曲线的变化轨迹直观地表明了 MaOEA/A2R 算法相比其他几种算法,其在 DTLZ4(15) 测试实例上能较优地获得高质量的近似解集.

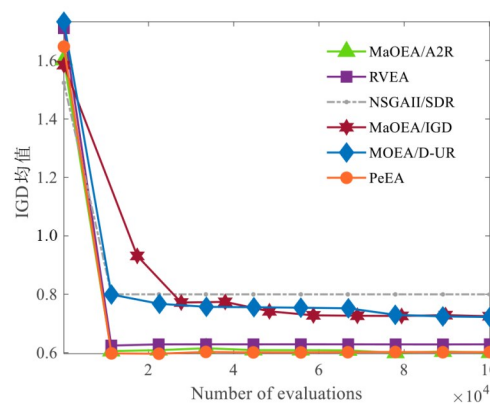


图 4 6 种算法在 15-目标的 DTLZ4 测试问题上获得的 IGD 均值的变化曲线

从图 5 可以看出,6 种算法所获得的 IGD 均值总体上均随评估次数 EN 的增大而呈现出变小的趋势.但相对而言, MaOEA/A2R 算法获得的 IGD 均值下降最

快. 其次是 NSGA-II/SDR 和 MOEA/D-UR. RVEA 和 PeEA 呈现出了先快速下降, 后缓慢上升再下降的波折. MaOEA/IGD 曲线波动较大, 在经历大约 5×10^4 次评估后趋于收敛, 但维持一个较高的值. 总体上, MaOEA/A2R 和 NSGA-II/SDR 算法在经历初始的 1×10^4 次评估后, 它们的 IGD 均值都能较快下降至一个相对较低的水平, 而在后期进化中, 它们的 IGD 均值呈现出缓慢变小的趋势. 因此, 从图 5 来看, MaOEA/A2R 在 WFG9(15) 实例上总体上表现出相对较快的收敛速度.

此外, 为考察 MaOEA/A2R 算法在 WFG 系列测试问题上的 HV 性能, 将 MaOEA/A2R 与 RVEA、NSGA-II/SDR、MaOEA/IGD、MOEA/D-UR 和 PeEA 一同在 5-、10-、15- 和 20- 目标的 WFG1~WFG9 测试实例上进行实验, 表 5 给出了 6 种算法在 5-、10-、15- 和 20- 目标的 WFG1~WFG9 测

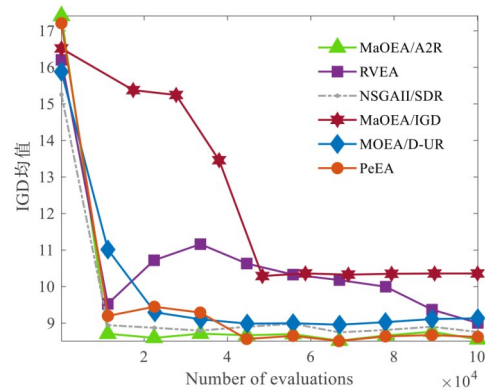


图 5 6 种算法在 15-目标的 WFG9 测试问题上获得的 IGD 均值的变化曲线

试问题上获得的 HV 均值与方差. 需要说明的是, 这里计算 HV 值所使用的参考点 r 设置为 $(1.1 \times Z^{nad})$, 这里

表 5 各算法在 4 种目标维度的 WFG 系列问题上获得的 HV 均值与方差

测试问题	目标数目	MaOEA/A2R	RVEA	NSGA-II/SDR	MaOEA/IGD	MOEA/D-UR	PeEA
WFG1	5	5.6619×10^{-1} (4.65×10^{-2})	5.7919×10^{-1} (3.62×10^{-2}) =	7.3554×10^{-1} (3.00×10^{-2}) +	5.2316×10^{-1} (8.02×10^{-2}) -	8.4599×10^{-1} (3.04×10^{-2}) +	7.6502×10^{-1} (3.90×10^{-2}) +
	10	4.8343×10^{-1} (3.26×10^{-2})	5.0298×10^{-1} (5.38×10^{-2}) =	6.5178×10^{-1} (2.74×10^{-2}) +	4.7542×10^{-1} (5.21×10^{-2}) =	8.5032×10^{-1} (5.17×10^{-2}) +	5.6103×10^{-1} (1.11×10^{-1}) +
	15	6.6814×10^{-1} (5.63×10^{-2})	8.5385×10^{-1} (7.30×10^{-2}) +	9.7329×10^{-1} (3.32×10^{-2}) +	4.7820×10^{-1} (1.50×10^{-1}) -	9.8246×10^{-1} (3.90×10^{-2}) +	9.0675×10^{-1} (1.82×10^{-1}) +
	20	6.9008×10^{-1} (9.78×10^{-2})	9.3325×10^{-1} (7.84×10^{-2}) +	9.9058×10^{-1} (5.65×10^{-3}) +	9.2976×10^{-1} (1.22×10^{-1}) +	9.9948×10^{-1} (3.16×10^{-4}) +	4.4736×10^{-1} (1.15×10^{-1}) -
WFG2	5	9.6124×10^{-1} (7.51×10^{-3})	9.4845×10^{-1} (9.04×10^{-3}) -	9.4619×10^{-1} (7.68×10^{-3}) -	9.1871×10^{-1} (3.25×10^{-2}) -	9.6817×10^{-1} (7.44×10^{-3}) +	9.5294×10^{-1} (9.92×10^{-3}) -
	10	9.3255×10^{-1} (9.63×10^{-3})	9.3485×10^{-1} (1.30×10^{-2}) =	9.6321×10^{-1} (4.68×10^{-3}) +	9.1335×10^{-1} (2.43×10^{-2}) -	9.6691×10^{-1} (1.08×10^{-2}) +	9.7500×10^{-1} (4.73×10^{-3}) +
	15	9.6734×10^{-1} (1.37×10^{-2})	9.3326×10^{-1} (2.96×10^{-2}) -	9.7066×10^{-1} (5.10×10^{-3}) =	8.6012×10^{-1} (1.53×10^{-1}) -	9.3092×10^{-1} (4.71×10^{-2}) -	9.8558×10^{-1} (5.76×10^{-3}) +
	20	9.6989×10^{-1} (1.35×10^{-2})	9.4394×10^{-1} (3.35×10^{-2}) -	9.8125×10^{-1} (3.46×10^{-3}) +	9.2932×10^{-1} (2.34×10^{-2}) -	9.3220×10^{-1} (3.66×10^{-2}) -	6.2093×10^{-1} (1.49×10^{-1}) -
WFG3	5	6.7990×10^{-2} (5.27×10^{-3})	7.8793×10^{-2} (1.51×10^{-2}) +	1.7100×10^{-1} (1.20×10^{-2}) +	5.0234×10^{-2} (1.40×10^{-2}) -	2.0126×10^{-1} (2.31×10^{-2}) +	1.4663×10^{-1} (1.77×10^{-2}) +
	10	0.0000×10^0 (0.00×10^0)	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =
	15	0.0000×10^0 (0.00×10^0)	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =
	20	0.0000×10^0 (0.00×10^0)	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =	0.0000×10^0 (0.00×10^0) =
WFG4	5	7.8322×10^{-1} (3.97×10^{-3})	7.4679×10^{-1} (1.20×10^{-2}) -	7.5930×10^{-1} (3.82×10^{-3}) -	1.6510×10^{-1} (1.45×10^{-1}) -	7.5031×10^{-1} (5.14×10^{-3}) -	7.3642×10^{-1} (6.46×10^{-3}) -
	10	9.0626×10^{-1} (8.85×10^{-3})	8.2976×10^{-1} (1.10×10^{-2}) -	9.0863×10^{-1} (4.99×10^{-3}) =	6.0310×10^{-1} (4.44×10^{-2}) -	8.8994×10^{-1} (6.86×10^{-3}) -	8.8310×10^{-1} (8.76×10^{-3}) -
	15	9.3515×10^{-1} (8.95×10^{-3})	8.9195×10^{-1} (2.20×10^{-2}) -	9.1699×10^{-1} (9.59×10^{-2}) -	1.7855×10^{-1} (1.26×10^{-1}) -	8.8649×10^{-1} (2.03×10^{-2}) -	8.9822×10^{-1} (1.48×10^{-2}) -
	20	9.4948×10^{-1} (1.21×10^{-2})	8.9775×10^{-1} (2.38×10^{-2}) -	8.5799×10^{-1} (1.21×10^{-1}) -	8.4245×10^{-1} (1.33×10^{-1}) -	9.0000×10^{-1} (1.34×10^{-2}) -	8.7316×10^{-1} (1.68×10^{-1}) =

续表

测试问题	目标数目	MaOEA/A2R	RVEA	NSGA-II/SDR	MaOEA/IGD	MOEA/D-UR	PeEA
WFG5	5	7.339 4×10 ⁻¹ (3.79×10 ⁻³)	7.385 1×10 ⁻¹ (2.47×10 ⁻³) +	7.398 1×10⁻¹ (3.14×10 ⁻³) +	2.491 5×10 ⁻¹ (2.26×10 ⁻¹) -	7.191 9×10 ⁻¹ (4.18×10 ⁻³) -	7.159 2×10 ⁻¹ (3.73×10 ⁻³) -
	10	8.479 9×10 ⁻¹ (5.70×10 ⁻³)	8.248 0×10 ⁻¹ (8.96×10 ⁻³) -	8.836 5×10⁻¹ (2.98×10 ⁻³) +	5.937 7×10 ⁻¹ (3.56×10 ⁻²) -	8.425 1×10 ⁻¹ (5.07×10 ⁻³) -	8.492 2×10 ⁻¹ (4.76×10 ⁻³) =
	15	8.792 7×10 ⁻¹ (5.46×10 ⁻³)	8.981 3×10 ⁻¹ (4.30×10 ⁻³) +	9.047 6×10⁻¹ (3.68×10 ⁻³) +	1.417 0×10 ⁻¹ (1.72×10 ⁻¹) -	8.233 3×10 ⁻¹ (1.75×10 ⁻²) -	8.557 7×10 ⁻¹ (1.14×10 ⁻²) -
	20	8.761 2×10 ⁻¹ (6.63×10 ⁻³)	8.524 3×10 ⁻¹ (9.94×10 ⁻³) -	9.086 9×10⁻¹ (5.31×10 ⁻³) +	6.456 2×10 ⁻¹ (2.26×10 ⁻¹) -	8.277 1×10 ⁻¹ (1.35×10 ⁻²) -	8.914 1×10 ⁻¹ (1.02×10 ⁻²) +
WFG6	5	7.436 5×10⁻¹ (6.07×10 ⁻³)	7.252 5×10 ⁻¹ (6.40×10 ⁻³) -	7.383 9×10 ⁻¹ (6.37×10 ⁻³) -	1.602 7×10 ⁻¹ (9.61×10 ⁻²) -	7.251 2×10 ⁻¹ (7.19×10 ⁻³) -	7.079 1×10 ⁻¹ (1.19×10 ⁻²) -
	10	8.486 9×10 ⁻¹ (9.71×10 ⁻³)	7.749 3×10 ⁻¹ (2.57×10 ⁻²) -	8.856 1×10⁻¹ (6.42×10 ⁻³) +	5.063 9×10 ⁻¹ (6.00×10 ⁻²) -	8.509 3×10 ⁻¹ (1.01×10 ⁻²) =	8.326 6×10 ⁻¹ (1.20×10 ⁻²) -
	15	8.823 2×10⁻¹ (1.33×10 ⁻²)	5.933 7×10 ⁻¹ (1.23×10 ⁻¹) -	8.467 4×10 ⁻¹ (1.17×10 ⁻¹) =	2.018 2×10 ⁻¹ (1.39×10 ⁻¹) -	8.404 0×10 ⁻¹ (1.92×10 ⁻²) -	8.422 0×10 ⁻¹ (1.90×10 ⁻²) -
	20	8.552 4×10 ⁻¹ (1.57×10 ⁻²)	6.874 0×10 ⁻¹ (6.16×10 ⁻²) -	7.616 3×10 ⁻¹ (5.98×10 ⁻²) -	4.789 8×10 ⁻¹ (2.61×10 ⁻¹) -	8.176 4×10 ⁻¹ (3.43×10 ⁻²) -	8.599 3×10⁻¹ (6.81×10 ⁻²) +
WFG7	5	7.903 6×10⁻¹ (3.58×10 ⁻³)	7.656 7×10 ⁻¹ (6.04×10 ⁻³) -	7.881 0×10 ⁻¹ (2.92×10 ⁻³) -	2.233 8×10 ⁻¹ (7.54×10 ⁻²) -	7.635 0×10 ⁻¹ (4.57×10 ⁻³) -	7.515 9×10 ⁻¹ (6.73×10 ⁻³) -
	10	9.256 0×10 ⁻¹ (4.44×10 ⁻³)	8.519 2×10 ⁻¹ (1.35×10 ⁻²) -	9.499 1×10⁻¹ (4.13×10 ⁻³) +	6.026 2×10 ⁻¹ (5.17×10 ⁻²) -	9.074 7×10 ⁻¹ (5.66×10 ⁻³) -	8.984 6×10 ⁻¹ (1.28×10 ⁻²) -
	15	9.528 1×10⁻¹ (6.63×10 ⁻³)	7.681 4×10 ⁻¹ (1.92×10 ⁻¹) -	7.974 0×10 ⁻¹ (1.15×10 ⁻¹) -	1.387 1×10 ⁻¹ (5.93×10 ⁻²) -	8.906 3×10 ⁻¹ (3.01×10 ⁻²) -	9.211 7×10 ⁻¹ (1.98×10 ⁻²) -
	20	9.670 5×10⁻¹ (8.86×10 ⁻³)	8.177 3×10 ⁻¹ (1.30×10 ⁻¹) -	9.544 8×10 ⁻¹ (1.17×10 ⁻²) -	8.138 1×10 ⁻¹ (1.88×10 ⁻¹) -	9.071 8×10 ⁻¹ (2.58×10 ⁻²) -	9.156 0×10 ⁻¹ (1.49×10 ⁻¹) =
WFG8	5	7.076 8×10 ⁻¹ (3.62×10 ⁻³)	6.941 1×10 ⁻¹ (7.23×10 ⁻³) -	7.094 2×10⁻¹ (4.55×10 ⁻³) =	8.254 9×10 ⁻² (4.06×10 ⁻²) -	6.946 1×10 ⁻¹ (8.83×10 ⁻³) -	6.735 8×10 ⁻¹ (9.04×10 ⁻³) -
	10	7.822 4×10 ⁻¹ (2.24×10 ⁻²)	5.863 9×10 ⁻¹ (4.91×10 ⁻²) -	8.391 2×10 ⁻¹ (7.84×10 ⁻³) +	6.016 9×10 ⁻¹ (9.27×10 ⁻²) -	7.992 6×10 ⁻¹ (1.24×10 ⁻²) +	8.506 9×10⁻¹ (1.87×10 ⁻²) +
	15	8.492 0×10 ⁻¹ (2.24×10 ⁻²)	4.761 9×10 ⁻¹ (1.74×10 ⁻¹) -	7.796 0×10 ⁻¹ (4.50×10 ⁻²) -	1.808 7×10 ⁻¹ (5.30×10 ⁻²) -	8.529 6×10 ⁻¹ (1.00×10 ⁻²) =	8.911 8×10⁻¹ (6.93×10 ⁻³) +
	20	8.770 4×10 ⁻¹ (5.69×10 ⁻²)	6.619 2×10 ⁻¹ (1.56×10 ⁻¹) -	8.764 0×10 ⁻¹ (1.83×10 ⁻²) =	2.950 6×10 ⁻¹ (2.09×10 ⁻¹) -	8.968 1×10 ⁻¹ (1.37×10 ⁻²) =	9.210 9×10⁻¹ (5.85×10 ⁻²) +
WFG9	5	7.367 8×10 ⁻¹ (1.14×10 ⁻²)	6.612 9×10 ⁻¹ (1.91×10 ⁻²) -	7.468 4×10⁻¹ (3.75×10 ⁻³) +	3.895 0×10 ⁻¹ (1.57×10 ⁻¹) -	6.839 3×10 ⁻¹ (1.61×10 ⁻²) -	7.102 6×10 ⁻¹ (1.13×10 ⁻²) -
	10	8.182 7×10 ⁻¹ (1.85×10 ⁻²)	7.237 0×10 ⁻¹ (2.94×10 ⁻²) -	8.750 1×10⁻¹ (7.71×10 ⁻³) +	6.299 1×10 ⁻¹ (2.85×10 ⁻²) -	7.277 9×10 ⁻¹ (2.94×10 ⁻²) -	8.299 2×10 ⁻¹ (1.40×10 ⁻²) +
	15	8.538 1×10 ⁻¹ (3.18×10 ⁻²)	7.017 4×10 ⁻¹ (6.72×10 ⁻²) -	8.341 5×10 ⁻¹ (8.14×10 ⁻²) =	4.359 6×10 ⁻¹ (2.51×10 ⁻¹) -	6.528 0×10 ⁻¹ (2.93×10 ⁻²) -	8.609 3×10⁻¹ (5.27×10 ⁻²) +
	20	8.535 6×10⁻¹ (4.07×10 ⁻²)	7.156 3×10 ⁻¹ (5.46×10 ⁻²) -	8.317 0×10 ⁻¹ (4.09×10 ⁻²) -	7.396 5×10 ⁻¹ (6.65×10 ⁻²) -	6.910 3×10 ⁻¹ (5.37×10 ⁻²) -	7.966 5×10 ⁻¹ (9.97×10 ⁻²) =
+/-/=			5/25/6	16/11/9	1/31/4	8/22/6	13/16/7

注：“+”、“-”和“=”分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 MaOEA/A2R 算法所获得的结果。

Z^{nad} 表示 MaOP 问题的理想点。

表 5 给出了 MaOEA/A2R、RVEA、NSGA-II/SDR、MaOEA/IGD、MOEA/D-UR 和 PeEA 算法在 36 个 WFG 测试实例上获得的 HV 均值与方差,其中 MaOEA/A2R、

NSGA-II/SDR、MOEA/D-UR 和 PeEA 算法分别获得 12、11、6 和 7 个最佳的 HV 均值结果,而 RVEA 和 MaOEA/IGD 无一能获得最佳的 HV 值。另外,从表 5 的 Wilcoxon 秩和检验结果来看, MaOEA/A2R 相对于 RVEA、NSGA-II/SDR、

MaOEA/IGD、MOEA/D-UR 和 PeEA 算法的净胜得分分别为 20、-5、30、14 和 3。但需指出,在 WFG1 问题上,MOEA/D-UR 获得了比 MaOEA/A2R 更好的 HV 性能。究其原因,WFG1 具有混合且有偏的特征,MOEA/D-UR 通过对权重调整以及采用新颖的目标空间划分算子等可较好地处理此类特征的测试问题。在 WFG5 问题上,NSGA-II/SDR 取得了比 MaOEA/A2R 要佳的性能。究其原因,WFG5 是一类具有欺骗特征的测试问题,其欺骗函数的全局最优位于一个相对狭小的区间内,其可挑战算法的局部搜索能力。NSGA-II/SDR 通过构建新的支配关系增强局部搜索能力,而 MaOEA/A2R 设计的支配关系更利于增强全局搜索能力。因此,在 WFG5 问题上, MaOEA/A2R 的性能不如 NSGA-II/SDR。总体上, MaOEA/A2R 的 A2R 支配关系在进化全过程中自适应调整参考向量关联区域的大小,实现解群收敛性与多样性之间的平衡,而且其采用 L_p -范式($p=1/M$)的拥挤距离度量保持高维目标解群的多样性亦较有效。以上两种关键策略相互协同并在不同的阶段发挥作用,有效地促进了算法性能的提升。

5 总结

传统的 Pareto 支配关系在高维目标空间的可扩展性差,而一些改进的支配关系在平衡高维目标解群的收敛性与多样性方面仍有提升空间。基于此,论文提出一种参考向量关联区域(小生境)可自适应缩减的支配方法 A2R。该支配方法随进化代数增加逐代缩小关联区域的大小(规模)。其目的在于:在进化的前期驱使种群朝 PF 方向进化,而在进化后期促进种群向参考向量靠拢,以实现收敛性与多样性间自动且有效的平衡。不仅如此,论文利用基于 L_p -范式($p<1$)的拥挤距离度量高维目标解群的多样性以克服传统的欧氏距离度量不适于高维目标空间的不足。上述两种算子(策略)嵌入到经典的 NSGA-II 框架以替代其原有的 Pareto 支配和基于欧氏距离的度量方法,从而设计出 MaOEA/A2R 算法。新算法与其他 5 种新近发展的高效的 MaOEA 算法一同在基准的 MaOP 测试集上进行 IGD 和 HV 性能实验,结果表明本文算法总体上具有较优越的收敛性与多样性,是一种颇具前景的 MaOEA。未来将利用一些更加复杂的 MaOP 问题检验本文算法的性能,并利用 MaOEA/A2R 求解现实应用中的一些 MaOP 问题。另外,设计一些高效的支配排序方法对种群实施分层亦是将来的努力方向之一。

参考文献

- [1] ZHANG Z X, CAO Y, CUI Z H, et al. A many-objective optimization based intelligent intrusion detection algorithm for enhancing security of vehicular networks in 6G[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2021, 70(6): 5234-5243.
- [2] ZHU Z H. A hybrid indicator many-objective optimization algorithm for the selection and delivery of disaster relief materials problem[J]. Concurrency and Computation: Practice and Experience, 2021, 33(6): e5948.
- [3] PAN L Q, LI L H, HE C, et al. A subregion division-based evolutionary algorithm with effective mating selection for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(8): 3477-3490.
- [4] 谢承旺, 余伟伟, 郭华, 等. DAV-MOEA: 一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法[J]. 计算机学报, 2022, 45(2): 317-333.
- [5] XIE C W, YU W W, GUO H, et al. DAV-MOEA: A many-objective evolutionary algorithm adopting dynamic angle vector based dominance relation[J]. Chinese Journal of Computers, 2022, 45(2): 317-333. (in Chinese)
- [6] YANG S X, LI M Q, LIU X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [7] ZOU X F, CHEN Y, LIU M Z, et al. A new evolutionary algorithm for solving many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2008, 38(5): 1402-1412.
- [8] ZHU C W, XU L H, GOODMAN E D. Generalization of Pareto-optimality for many-objective evolutionary optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(2): 299-315.
- [9] ZHU S W, XU L H, GOODMAN E D, et al. A new many-objective evolutionary algorithm based on generalized Pareto dominance[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(8): 7776-7790.
- [10] LIU Y, ZHU N B, LI K L, et al. An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization[J]. Information Sciences, 2020, 509: 376-399.
- [11] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 331-345.
- [12] SHEN J T, WANG P, WANG X J. A controlled strengthened dominance relation for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(5): 3645-3657.
- [13] YUAN Y, XU H, WANG B, et al. A new dominance rela-

- tion-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(1): 16-37.
- [13] GU Q H, CHEN H Y, CHEN L, et al. A many-objective evolutionary algorithm with reference points-based strengthened dominance relation[J]. Information Sciences, 2021, 554: 236-255.
- [14] 谢承旺, 郭华, 韦伟, 等. MaOEA/d²: 一种基于双距离构造的高维多目标进化算法[J]. 软件学报, 2023, 34(4): 1523-1542.
- XIE C W, GUO H, WEI W, et al. MaOEA/d²: Many-objective evolutionary algorithm based on double distances [J]. Journal of Software, 2023, 34(4): 1523-1542. (in Chinese)
- [15] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [16] DEB K, THIELE L, LAUMANN S M, et al. Scalable multi-objective optimization test problems[C]//Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No. 02TH8600). Piscataway: IEEE, 2002: 825-830.
- [17] HUBAND S, BARONE L, WHILE L, et al. A scalable multi-objective test problem toolkit[C]//Proceedings of the Third International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. New York: ACM, 2005: 280-295.
- [18] ISHIBUCHI H, MASUDA H, TANIGAKI Y, et al. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance[C]//Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2015: 110-125.
- [19] JIANG S W, ONG Y S, ZHANG J, et al. Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(12): 2391-2404.
- [20] CHENG R, JIN Y C, OLHOFFER M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [21] SUN Y N, YEN G G, YI Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 173-187.
- [22] DE FARIAS L R C, ARAÚJO A F R. A decomposition-based many-objective evolutionary algorithm updating weights when required[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2022, 68: 100980.
- [23] LI L, YEN G G, SAHOO A, et al. On the estimation of Pareto front and dimensional similarity in many-objective evolutionary algorithm[J]. Information Sciences, 2021, 563: 375-400.
- [24] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X Y, et al. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization[educational forum][J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.

作者简介



谢承旺 男, 1974年9月出生于湖北省武汉市. 华南师范大学数据科学与工程学院院长、教授. 主要研究方向为智能计算的理论与应用.
E-mail: chengwangxie@163.com



付世炜 男, 1998年12月出生于山东省滨州市. 南宁师范大学计算机与信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为智能计算与多目标优化.
E-mail: shiwei_fu1998@163.com